有理函数的不定积分

Iridium LINCH-SK

在陈波珍老师的《化学反应动力学》课上，我们需要经常应对一些乍一看没有那么显然的不定积分，比如

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}\to\mathrm{P}, \tag{1}$$

或者

$$2\mathrm{A}+\mathrm{B}\to\mathrm{P}. \tag{2}$$

如果两个反应都是基元反应的话，那么它们分别有速率方程：

$$r=k(\mathrm{A})(\mathrm{B}), \tag{3}$$

$$r=k(\mathrm{A})^2(\mathrm{B}). \tag{4}$$

对于涉及两种及其以上反应物的情形，一般设反应进度x为两个反应物的公共变量，此时的速率方程分别写作：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k((\mathrm{A})_0-x)((\mathrm{B})_0-x), \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k((\mathrm{A})_0-2x)^2((\mathrm{B})_0-x). \tag{6}$$

欲求动力学方程的解析形式，分离变量后积分是必不可少的步骤，而这中间最大的一个阻碍就在求等式左侧含x积分的地方：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{((\mathrm{A})_0-x)((\mathrm{B})_0-x)}=\int k\mathrm{d}t, \tag{7}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{((\mathrm{A})_0-2x)^2((\mathrm{B})_0-x)}=\int k\mathrm{d}t. \tag{8}$$

为了求这两个积分，我们需要简单复习（或者说系统总结）一下如何求有理函数的积分，所谓有理函数，就是具有**多项式与多项式之比**形式的函数，写作一个具体的式子$R(x)$，即：

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

式中，$P(x)$和$Q(x)$都是多项式，且$\deg Q(x) \neq 0$（否则$Q(x)$成为常函数，退化为平凡的多项式情形）。多项式$P(x)$包含的最高次幂称为$P(x)$的**次数**，符号记作$\deg P(x)$。如果$\deg P(x) < \deg Q(x)$，则称$R(x)$是**真有理函数**；若$\deg P(x) \geq \deg Q(x)$，则称$R(x)$是**假有理函数**。

利用多项式的带余除法，我们总能把一个假有理函数转变为一个真有理函数和多项式之和。具体操作如下：
设$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_Ax^A$，$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_Bx^B$，且$A = \deg P(x) \geq \deg Q(x) = B$，则先取

$$q_1 = \frac{a_A}{b_B}x^{A-B},$$

由于$A \geq B$，q_1中x的幂次是非负的，故q_1是一个x的单项式。此时，定义$P_1 := P(x) - q_1Q(x)$，则

$$P_1(x) = (a_{A-1} - \frac{a_Ab_{B-1}}{b_B})x^{A-1} + \ldots + (a_{A-B} - \frac{a_Ab_0}{b_B})x^{A-B} + a_{A-B-1}x^{A-B-1} + \ldots + a_0$$

我们便可以把原本的有理函数改写为

$$R(x) = q_1 + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

此时的$\deg P_1 < \deg P(x)$。若仍有$\deg P_1(x) \geq \deg Q(x)$，则对$P_1(x)$采用和$P(x)$一样的手续，使得$\deg q_2 = \deg P_1 - B$，此时$P_2(x) = P_1(x) - q_2Q(x)$，而$\deg P_2(x) < \deg P_1(x)$。重复该步骤，直到第$k$次时，出现$\deg P_k(x) < \deg Q(x)$。此时，不存在一个$x$的单项式$q_{k+1}$，使得$\deg P_k(x) = \deg q_{k+1}Q(x)$，这样的手续便无法进行下去了。此时，有理函数表达为

$$R(x) = q_1 + \ldots + q_k + \frac{P_k(x)}{Q(x)}.$$

由于$q_1, \ldots, q_k$均为单项式，$q_1 + \ldots + q_k$即多项式。

$$\frac{P_k(x)}{Q(x)}$$

成为真有理函数。在此过程中，$q_1+\ldots+q_k$称为$P(x)$除以$Q(x)$的**商**，而$P_k(x)$称为$P(x)$除以$Q(x)$的**余数**，这和整数的带余除法定义类似，故称上述手续为**多项式的带余除法**。

多项式的积分处理是十分平凡的，对于多项式

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x^i,$$

其不定积分为

$$\int \mathrm{d}x P(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+1}x^{i+1}+C.$$

C为任意常数。

因此一切有理函数的不定积分问题关键在于处理带余除法产生的真有理分式。对于一个高次的$Q(x)$，我们显然不能用直觉（俗称“瞪眼法”）判断出来应当怎么去做积分，但我们总能尝试将多项式做因式分解从而探索求解的方法。下文的论述将指出我们总能把一个真有理函数分解成若干标准形式的求和，对这些标准形式我们便可以运用直觉，或者提前准备好处理它的手续，把最终的函数形式表达为这些标准形式积分的和。

和式的积分总是比积式的积分讨喜得很

——Iridium LINCH-SK

定理（代数基本定理） 任意复数域上的多项式$p(x)\in\mathbb{C}[x]$总能分解为一次多项式的积，即

$$p(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$$

式中，n即多项式的次数，a_i是多项式的根。

依我看啊，中小学教书的老师可以尝试直接称整数集、有理数集、实数集和复数集为“整数环”、“有理数域”、“实数域”和“复数域”。这时学生们听到就好奇了，“什么是‘环’，什么是‘域’啊？”下课就去问老师，老师稍微一解释，学生对数学的兴趣就起来了……

——孙笑涛 2019年冬季 于中国科学院大学玉泉路校区

我们在这里并不打算证明这个定理。我们只打算根据这个定理证明下述论断：

定理 实系数多项式可以分解为若干一次多项式和没有实根的二次多项式之积，即任一实系数多项式均可表示为形式：

$$p(x) = C\prod_{i=1}^{l}(x-a_i)^{d_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+b_jx+c_j)^{f_j}, b_j^2-4c_j<0.$$

这里，i是实数根的指标，d_i代表实根a_i的重数；j是无实根二次多项式的指标，f_j即该二次多项式因子的重数。

证明 实系数多项式自然是复系数多项式，因此可以直接运用代数基本定理，指出：n次多项式可以分解为n个一次多项式之积，这些一次多项式的根可以是实数，也可以是复数。
如果$x\in\mathbb{C}$是多项式

$$\sum_{i=0}^{n}p_ix^i=0$$

的解，那么x的复共轭x^*满足多项式方程

$$\sum_{i=0}^{n}p_i^*x^{*i}=0$$

然而$p_i\in\mathbb{R}$，因此$p_i=p_i^*$，也就意味着x和x^*满足同一多项式方程。对一个实多项式，如果$x\in\mathbb{C}$是它的根，那么x^*也是它的根。若$z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$是多项式的根，则$(x-z)(x-z^*)=x^2+bx+c$成为多项式的因子。根据韦达定理，这个因子是实系数的，因为

$$\begin{cases} b=z+z^*, \\ c=zz^*. \end{cases}$$

均为实数。这个因子没有实根，因此其判别式小于零。

□

对于一个真有理函数，由上述定理，即可指出其分母可以被分解为

$$R(x)=\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{l}(x-a_i)^{d_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+b_jx+c_j)^{f_j}}, b_j^2-4c_j<0.$$

的形式。$P(x)$的形式并不重要，我们很容易看出分母具有被通分后的结构。我们可以考察，哪些有理函数的和被通分可以产生分母$Q(x)$：
对于多项式的一个根a_i，我们在待通分的分式集中引入次数不超过d_i的分式：

$$\left\{\frac{1}{x-a_i},\dots,\frac{1}{(x-a_i)^{d_i}}\right\}$$

我们显然不能引入次数更高的分式了。将多项式的所有实根纳入考虑，则待通分的函数集为

$$\left\{\frac{1}{x-a_1},\dots,\frac{1}{(x-a_1)^{d_1}};\dots;\frac{1}{x-a_l},\dots,\frac{1}{(x-a_l)^{d_l}}\right\}$$

当我们将无实根二次多项式纳入考虑时，我们需要注意，分子可以至多包含一次多项式，因此待通分的函数集应当写作

$$\left\{\frac{x+g_{j,1}}{x^2+b_jx+c_j},\dots,\frac{x+g_{j,f_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{f_j}}\right\}$$

综上所述，以$Q(x)$为分母的有理函数至多容许以下函数集的通分：

$$\mathcal{B}(Q(x))=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{x-a_1},\dots,\dfrac{1}{(x-a_1)^{d_1}};\\ \dots;\\ \dfrac{1}{x-a_l},\dots,\dfrac{1}{(x-a_l)^{d_l}};\\ \dfrac{x+g_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1},\dots,\dfrac{x+g_{1,f_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{f_1}}\\ \dots;\\ \dfrac{x+g_{m,1}}{x^2+b_mx+c_m},\dots,\dfrac{x+g_{m,f_m}}{(x^2+b_mx+c_m)^{f_m}}\end{array}\right\}$$

通分时，所有通分的乘式都是常系数。

我们首先梳理一遍应对这些分式的标准积分手续：

一次多项式一次分式 这是一次多项式分式的特殊情形，我们在本科的微积分教程中早已熟稔：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a_i}=\ln|x-a_i|+C.$$

一次多项式高次分式 这是一次多项式分式的一般情形，也属于学过本科微积分之后就能瞪眼瞪出来的：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a_i)^{d_i}} = -\frac{1}{d_i-1}\frac{1}{(x-a_i)^{d_i-1}} + C.(d_i > 1)$$

二次无实根多项式分式 到这里就需要一点构造技巧了，不过只要本科微积分凑微分技巧足够熟练，还是能凑出全微分的。和一次多项式一样，这里仍然需要对多项式整体在分母中的次数进行一次分类讨论：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x(x+g_{j,1})}{x^2+b_jx+c_j} &= \int \frac{\mathrm{d}x(x+b_j/2-b_j/2+g_{j,1})}{x^2+b_jx+c_j} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+b_jx+c_j)}{x^2+b_jx+c_j} + \int \frac{\mathrm{d}x(g_{j,1}-b_j/2)}{x^2+b_jx+c_j} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+b_jx+c_j| + \int \frac{\mathrm{d}x(g_{j,1}-b_j/2)}{x^2+b_jx+c_j}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x(x+g_{j,f_m})}{(x^2+b_jx+c_j)^{f_m}} &= \int \frac{\mathrm{d}x(x+b_j/2-b_j/2+g_{j,f_m})}{x^2+b_jx+c_j} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+b_jx+c_j)}{(x^2+b_jx+c_j)^{f_m}} + \int \frac{\mathrm{d}x(g_{j,f_m}-b_j/2)}{(x^2+b_jx+c_j)^{f_m}} \\ &= -\frac{1}{2(f_m-1)}\frac{1}{(x^2+b_jx+c_j)^{f_m-1}} + \int \frac{\mathrm{d}x(g_{j,f_m}-b_j/2)}{x^2+b_jx+c_j}.\end{aligned}$$

经过这番凑微分后，我们剩下了分子为常数项的积分。根据分母次数的不同，处理的难度有很大差别：

二次无实根多项式一次分式，且分子为常数 抛去上文凑微分时产生的无聊的系数，二次无实根多项式一次分式，且分子为常数的基本形式为：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+b_jx+c_j}$$

最基本的观点还是凑微分，置

$$t = \frac{x+\frac{b_j}{2}}{\sqrt{c_j-\frac{b_j^2}{4}}}$$

停！这是可以做到的吗？根号内的式子大于零吗？
答：是的，因为这是一个无实根的多项式。

$$
\begin{aligned}
\text{LHS} &= \int \frac{\sqrt{c_j - \frac{b_j^2}{4}}\mathrm{d}t}{\left(c_j - \frac{b_j^2}{4}\right)(t^2+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_j - \frac{b_j^2}{4}}}\arctan(t) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_j - \frac{b_j^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b_j}{2}}{\sqrt{c_j - \frac{b_j^2}{4}}}\right) + C.
\end{aligned}
$$

二次无实根多项式高次分式，且分子为常数 运用类似上文的方法，忽略掉一些无聊的系数，我们总能把这种情形的式子整理成这种形式：

$$
\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}
$$

其中r是一个常数，并记上式为I_k。此处的凑全微分需要一点特别的技巧，以实现I_k函数列的迭代：

$$
\begin{aligned}
I_k :&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k} \\
&= \frac{1}{r^2}\int \frac{r^2\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k} \\
&= \frac{1}{r^2}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^k}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\left(\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\left(\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - I_{k-1}\right)\right) \\
&= \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)}I_{k-1}
\end{aligned}
$$

经过一番迭代，对于任意幂次的分子为常数的二次无实根多项式分式，最终总能归结到求I_1，也就是分子为常数的二次无实根多项式一次分式，我们已经在前文讨论过了。

待定系数法做标准分解 前面的论述都是对$\mathcal{B}(Q(x))$中元素做积分，而现在我们要回到分解本身上来。通分的本质无外乎是分式的线性组合。将有理函数$P(x)/Q(x)$用$\mathcal{B}(Q(x))$（如果你忘了$\mathcal{B}(Q(x))$的含义的话，翻回第5页）中函数的常系数线性组合的过程称为**有理函数的标准分解**。

$$R(x) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{d_i} c_{1,i,\mu}\frac{1}{(x-a_i)^\mu} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{f_j} c_{2,j,\nu}\frac{x+g_{j,\nu}}{(x^2+b_jx+c_j)^\nu}$$

以常数为系数对$\mathcal{B}(Q(x))$中函数进行通分，得到的分子是多项式。将通分后的多项式和$P(x)$做逐项比较，即可求得标准分解的诸项系数。
我们似乎需要更加深入地考察一下这样的分解。对于一般的$\mathcal{B}(Q(x))$，它包含

$$\sum_{i=1}^{l} d_i + \sum_{j=1}^{m} 2f_j$$

个可以变动的系数。其中，每个无实根的二次多项式分式需要两个系数，因为$g_{j,f}$也是待定的。那么我们总是可以重新标记系数如下：

$$\begin{aligned} c_{2,j,\nu,1} &:= c_{2,j,\nu}, \\ c_{2,j,\nu,0} &:= c_{2,j,\nu}g_{j,\nu}. \end{aligned}$$

此时标准分解式成为：

$$R(x) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{d_i} \frac{c_{1,i,\mu}}{(x-a_i)^\mu} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{f_j} \left(\frac{c_{2,j,\nu,1}x}{(x^2+b_jx+c_j)^\nu} + \frac{c_{2,j,\nu,0}}{(x^2+b_jx+c_j)^\nu}\right)$$

将分母$Q(x)$因式分解完全后，注意到多项式$Q(x)$的次数与展开时满足关系：

$$\deg Q(x) = \sum_{i=1}^{l} d_i + \sum_{j=1}^{m} 2f_j$$

一个真有理函数的分子至多是$\deg Q(x)-1$次的，因此包含$\deg Q(x)$个单项式。每个单项式比较系数都会得到一个关于$\{c_{1,i,\mu}, c_{2,j,\nu,1}, c_{2,j,\nu,0}\}$的线性方程。这个线性方程组有确定的解。

裂项法做标准分解 求解线性方程组是一个繁琐且不优雅的方法，在实际操作过程中我们还是更喜欢使用一些数学小技巧：

通分的逆过程叫约分；但通分求和的逆过程叫做裂项相减，想想看是不是这么个道理。

——Iridium LINCH-SK

先考虑只有一次多项式因子的情形，比如

$$\frac{1}{(x-a)^\mu(x-b)^\nu}$$

我们熟知的裂项公式是这样的：

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$$

因此我们可以从原本的式子中分离出一对可以裂项的因式，然后我们发现裂项后得到了两个次数较低的分式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-a)^\mu(x-b)^\nu}&=\frac{1}{(x-a)^{\mu-1}(x-b)^{\nu-1}}\frac{1}{(x-a)(x-b)}\\&=\frac{1}{a-b}\frac{1}{(x-a)^{\mu-1}(x-b)^{\nu-1}}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)\\&=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{(x-a)^{\mu}(x-b)^{\nu-1}}-\frac{1}{(x-a)^{\mu-1}(x-b)^{\nu}}\right)\end{aligned}$$

对拆开的两项进行相同手续，最终会将式子完全分解。

只有二次无实根多项式因子相乘的情形。根据上一段的经验，我们其实只需要考虑两个二次的因式乘在一起的情形：

$$\frac{1}{(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)}=\frac{1}{(b_2-b_1)x+(c_2-c_1)}\left(\frac{1}{x^2+b_1x+c_1}-\frac{1}{x^2+b_2x+c_2}\right)$$

这里将两个二次多项式相乘的情形转变为了一次多项式和二次多项式相乘的情形，我们着手处理这种情况：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-a)(x^2+bx+c)}&=\frac{1}{c+a(a+b)}\frac{1}{x-a}\left(1-\frac{(x-a)(x+a+b)}{x^2+bx+c}\right)\\&=\frac{1}{c+a(a+b)}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{x+a+b}{x^2+bx+c}\right)\end{aligned}$$

对于上文两个二次多项式分式相乘的情形，我们引入了一个一次分式作为分解中间式。我们需要证明，在这个过程中引入的一次分式会被消掉，事实上：

$$a=-\frac{c_2-c_1}{b_2-b_1},$$

对于两个不同的二次多项式分式与$1/(x-a)$的积，它们的$1/(c+a(a+b))$分别为：

$$\begin{aligned}
c_1 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}\left(b_1 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}\right) &\stackrel{?}{=} c_2 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}\left(b_2 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}\right) \\
c_1 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}b_1 &\stackrel{?}{=} c_2 - \frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}b_2 \\
c_1 - c_2 &\stackrel{?}{=} -\frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}(b_2-b_1) \\
c_1 - c_2 &= c_1 - c_2
\end{aligned}$$

二者因子相同，在原式中符号相反，这个一次多项式会被消掉，裂项后产生的项不包含中间一次多项式。

对于带有任意分子$P(x)$的有理函数，可以对$P(x)$也做因式分解。虽然$P(x)/Q(x)$已不可约，但仍可令$P(x)$中某因子对$Q(x)$中某因子做带余除法，将原有理函数拆成一个分子更简单的项和一个分母更简单的项的求和。这时，裂项总可归结为一次分式乘一次分式和一次分式乘二次分式的情形。

例1 （7）式 等式左边是最简单的一次裂项情形：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{((\mathrm{A})_0 - x)((\mathrm{B})_0 - x)} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{B})_0 - (\mathrm{A})_0}\left(\frac{1}{(\mathrm{A})_0 - x} - \frac{1}{(\mathrm{B})_0 - x}\right) \\
&= \frac{1}{(\mathrm{A})_0 - (\mathrm{B})_0}\ln\frac{(\mathrm{A})_0 - x}{(\mathrm{B})_0 - x} + C
\end{aligned}$$

当$t=0$时，$x=0$

$$C = \frac{1}{(\mathrm{A})_0 - (\mathrm{B})_0}\ln\frac{(\mathrm{B})_0}{(\mathrm{A})_0}$$

因此动力学方程为

$$\frac{1}{(\mathrm{A})_0 - (\mathrm{B})_0}\ln\frac{(\mathrm{B})_0\,((\mathrm{A})_0 - x)}{(\mathrm{A})_0\,((\mathrm{B})_0 - x)} = kt$$

例2 （8）式 仍然是一次裂项，但出现了高次幂的一次项

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{((\mathrm{A})_0-2x)^2((\mathrm{B})_0-x)} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{4((\mathrm{A})_0/2-x)^2((\mathrm{B})_0-x)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{4((\mathrm{A})_0/2-x)} \frac{1}{((\mathrm{A})_0/2-x)((\mathrm{B})_0-x)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{4((\mathrm{A})_0/2-x)} \frac{1}{(\mathrm{B})_0-(\mathrm{A})_0/2} \left(\frac{1}{(\mathrm{A})_0/2-x} - \frac{1}{(\mathrm{B})_0-x}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{2((\mathrm{A})_0/2-x)^2} \frac{1}{2(\mathrm{B})_0-(\mathrm{A})_0} \\
&\quad - \int \frac{\mathrm{d}x}{2((\mathrm{A})_0/2-x)} \frac{1}{2(\mathrm{B})_0-(\mathrm{A})_0} \frac{1}{(\mathrm{B})_0-x} \\
&= -\frac{1}{(\mathrm{A})_0-2(\mathrm{B})_0} \frac{1}{(\mathrm{A})_0-2x} + \frac{1}{((\mathrm{A})_0-2(\mathrm{B})_0)^2} \ln \frac{(\mathrm{A})_0-2x}{2((\mathrm{B})_0-x)} + C
\end{aligned}$$

当$t=0$时，$x=0$

$$C = \frac{1}{(\mathrm{A})_0-2(\mathrm{B})_0} \frac{1}{(\mathrm{A})_0} - \frac{1}{((\mathrm{A})_0-2(\mathrm{B})_0)^2} \ln \frac{(\mathrm{A})_0}{2(\mathrm{B})_0}$$

动力学方程为

$$\frac{1}{(\mathrm{A})_0-2(\mathrm{B})_0} \left(\frac{1}{(\mathrm{A})_0} - \frac{1}{(\mathrm{A})_0-2x}\right) + \frac{1}{((\mathrm{A})_0-2(\mathrm{B})_0)^2} \ln \frac{(\mathrm{B})_0((\mathrm{A})_0-2x)}{(\mathrm{A})_0((\mathrm{B})_0-x)} = kt$$

我们已经知道，对于任意有理函数，我们总是可以写出初等函数形式的不定积分。那么，具体到化学反应动力学的情形，我们有以下论断：

若反应速率方程正比于反应物浓度的自然数次幂的乘积，那么它的不定积分一定可以写成初等函数。