中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B02GB001Y-05

课程名称：力学 21-22 秋季

任课教师：毕效军

注意事项：
1.考试时间为_120_分钟，考试方式_闭_卷；
2.全部答案写在答题纸上；
3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

中国科学院大学 2021-2022 学年秋季学期
力学 5 班期末考试参考答案与评分标准

一、 填空题（共 8 题，每空 2 分，共 32 分）

若一空填错但接近正确答案，则可以得该空一半分。

1. 现有一质量为 m、半径为 r 的匀质圆盘。若转轴过圆盘中心且垂直于圆盘平面，则转动惯量为_$\frac{1}{2}mr^2$_；若转轴过圆盘中心且在圆盘平面内，则转动惯量为_$\frac{1}{4}mr^2$_。

   第二空与第一空之比为 $\frac{1}{2}$ 得 2 分。

2. 刚体相对某参考系作平面平行运动时，在任意时刻总能找到一个称为瞬心的点，则该参考系中瞬心的速度_一定_为 **0**，加速度_不一定_为 **0**（填一定或不一定）。

3. 内外半径几乎同为 R、质量为 M 的匀质圆环，静止地平放在水平桌面上，环内某直径的两端各有一个质量同为 m 的静止小球，设系统处处无摩擦。现以一个水平恒力 F 拉环，其方向线通过环心且与上述直径垂直，则在两小球相碰前瞬间，质心系中该水平恒力所作的功为_$\frac{2mFR}{M+2m}$_，两小球的相对速度大小为_$2\sqrt{\frac{2FR}{M+2m}}$_。

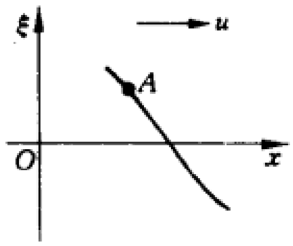
   第一空体现了力的作用点相对质心的位移得 1 分，第二空填 $\sqrt{\frac{2FR}{M+2m}}$ 得 1 分，第二空的平方与第一空之比为 $\frac{4}{m}$ 得 1 分。

4. 其他条件相同时，黏性流体的黏度越大，则雷诺数越_小_（填大或小），越_难_（填易或难）形成湍流。

5. 可绕固定水平轴左右摆动的刚体称为复摆，若刚体的质量为 m、相对转轴的转动惯量为 I、质心到转轴的距离为 r，则该复摆作小角度摆动的周期为_$2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}}$_；小角度摆动周期与之相同的单摆称为等时摆，则该复摆的等时摆长为_$\frac{I}{mr}$_。

第一空填 $\sqrt{\frac{mgr}{I}}$ 得 1 分，第二空与第一空的平方之比为 $\frac{g}{4\pi^2}$ 得 2 分。

6. 已知某介质中的波速为 200 m/s，一列平面简谐波的波长为 100 m，在某时刻的一部分波形曲线如右图所示。已知图中的 A 点坐标为 20 m、振动量为 4 m、振动速度为 12π m/s，不在图中的 B 点坐标为 95 m，则此时刻 B 点的振动量为_3_m、振动速度为_−16π_m/s。（结果保留 π）



第一空填 −3 得 1 分，第二空填 16π 得 1 分。

7. 已知某介质中的波速为 u、波源的振动频率为 ν_0、波源相对介质的速度大小 $v_S < u$、观察者相对介质的速度大小 $v_B < u$，且波源与观察者的速度方向均在二者连线上。若波源与观察者相向运动，则观察者接收到的频率为_$\frac{u+v_B}{u-v_S}\nu_0$_；若波源与观察者背向运动，则观察者接收到的频率为_$\frac{u-v_B}{u+v_S}\nu_0$_。

第一空填 $\sqrt{\frac{u+v_S+v_B}{u-v_S-v_B}}\nu_0$ 且第二空填 $\sqrt{\frac{u-v_S-v_B}{u+v_S+v_B}}\nu_0$ 得 1 分。

8. 已知真空中光速为 c，电子的静质量为 0.511 MeV/c^2。在北京正负电子对撞机的某次实验中，电子被加速到 0.999 c，则其动质量为_11.4_MeV/c^2，动能为_10.9_MeV（结果保留三位有效数字）。

二、 简答题（共 3 题，每题 6 分，共 18 分）

若答出关键字词或推导出关键公式则得相应所有分。

9. 写出狭义相对性原理以及洛伦兹变换公式。

在所有惯性参考系中，物理学定律具有相同的表达形式（3 分）。

设一个惯性参考系 S' 相对另一个惯性参考系 S 以匀速度 $\boldsymbol{v}$ 平动，$t'=t=0$ 时刻两个坐标系的原点重合，且将 x' 与 x 轴同沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向设置，则两参考系之间运动学量的变换关系为 $x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，$y=y'$，$z=z'$，$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$（3 分）。

10. 叙述刚体转动惯量的平行轴定理，并用转动惯量的定义证明。

设刚体质量为 m，取两个互相平行、间距为 d 的转轴 MN 和 PQ，其中 PQ 过刚体质心 C，设置从 MN 轴指向 PQ 轴的矢量 $\boldsymbol{d}$。对刚体任一质元 m_i，从 MN 轴向其引出矢量 $\boldsymbol{r}_i$，再从 PQ 轴向其引出矢量 $\boldsymbol{r}_{iC}$，则有关系 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_{iC}+\boldsymbol{d}$。

刚体相对 PQ 轴的转动惯量为

$$I_C=\sum_i m_i r_{iC}^2\ \text{（1 分）},$$

刚体相对 MN 轴的转动惯量为

$$\begin{aligned}I_{MN}&=\sum_i m_i r_i^2=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_{iC}+\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{r}_{iC}+\boldsymbol{d})\\&=\sum_i m_i(\boldsymbol{r}_{iC}\cdot\boldsymbol{r}_{iC}+2\boldsymbol{r}_{iC}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d})=\sum_i m_i(r_{iC}^2+2\boldsymbol{r}_{iC}\cdot\boldsymbol{d}+d^2)\\&=\sum_i m_i r_{iC}^2+2\sum_i m_i\boldsymbol{r}_{iC}\cdot\boldsymbol{d}+\sum_i m_i d^2\\&=I_C+2\left(\sum_i m_i\boldsymbol{r}_{iC}\right)\cdot\boldsymbol{d}+md^2\ \text{（2 分）。}\end{aligned}$$

由质心的定义可得 $\sum_i m_i\boldsymbol{r}_{iC}=m\boldsymbol{r}_{CC}=\boldsymbol{0}$，其中从 PQ 轴向质心 C 引出的矢量 $\boldsymbol{r}_{CC}=\boldsymbol{0}$。故有 $I_{MN}=I_C+md^2$（3 分），此即刚体转动惯量的平行轴定理。

11. 写出受迫振动的动力学微分方程及其稳态解，解释共振现象并说明其产生条件。

阻尼振动中随着能量的损耗，物体最终停止运动。而若附加一个周期性的外力对物体作功不断输入能量，则物体仍可保持连续振动，称为受迫振动。该周期性的外力称为驱动力，最基本的驱动力可表述为 $F=F_0\cos\omega t$。

设振子的质量为 m，取线性的回复性保守力 $F_x=-kx$ 以及阻尼力 $f_x=-\gamma v$，则由牛顿第二定律可得 $ma=F_x+f_x+F$，可改述为受迫振动的动力学微分方程

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t\ \text{（1 分）},$$

其中$\beta=\frac{\gamma}{2m}$、$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$、$f_0=\frac{F_0}{m}$。

受迫振动的通解可表示为阻尼振动的通解与一个非齐次特解的叠加，而前者随时间作指数衰减，因此后者即为受迫振动的稳态解

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)\ \text{（1 分）},$$

其中$A=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}}$（1 分）、$\tan\varphi=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$（1 分）。

固定 f_0，对于不同的 β 值可绘制出一系列 $A-\omega$ 曲线。若 $\beta\geq\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ 则曲线无极大值；而若 $\beta<\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ 则当驱动力的角频率取为 $\omega_{\mathrm{r}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$ 时，振幅达到极大值 $A_{\mathrm{M}}=\frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$，即出现共振现象（1 分）。阻尼系数 β 越小，则共振角频率 ω_{r} 越接近固

有角频率 ω_0、共振峰越尖锐；若 $\beta \ll \omega_0$ 则有 $\omega_\mathrm{r} \approx \omega_0$ 以及 $A_\mathrm{M} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$（1 分）。

三、 计算题（共 5 题，每题 10 分，共 50 分）

若计算结果正确则得满分，若推导到某一步骤则得该步骤及其之前所有分。

12. 总质量为 m、各质点质量分别为 m_i 的质点系相对某参考系运动，各质点在某时刻相对某参考点 O 的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_i$。我们可定义该质点系的质心 C，并将质心看作质量为 m 的质点，从而定义质心的各运动学量以及各动力学量，

(1) 证明质点系动量 $\boldsymbol{p}$ 即为质心动量 $\boldsymbol{p}_C$；

质心相对参考点 O 的位矢为

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{m}。$$

质点系的动量为

$$\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \text{（1 分）},$$

质心的动量为

$$\boldsymbol{p}_C = m\boldsymbol{v}_C = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{m}\right) = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \text{（1 分）},$$

因此 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_C$。

(2) 证明质点系相对该参考点的角动量 $\boldsymbol{L}$ 可分解为质心相对该参考点的角动量 $\boldsymbol{L}_C$ 与质点系相对质心的角动量 $\boldsymbol{L}'$ 之和；

设各质点相对质心 C 的位矢分别为 $\boldsymbol{r}_i'$，则有 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_i'$、$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_i'$，且

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_C) = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i - \left(\sum_i m_i\right)\boldsymbol{r}_C = m\boldsymbol{r}_C - m\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{0},$$

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'\right) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{0}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}。$$

质点系相对参考点 O 的角动量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_i \boldsymbol{L}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_i') \times (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_i') \\ &= \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i')\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_i m_i\right)\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \left(\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i'\right) + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i'\right) \times \boldsymbol{v}_C + \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i'$$

$$= m\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{v}_C + \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i'$$

$$= m\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C + \sum_i m_i\, \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i' \text{（3 分）。}$$

质心相对参考点 O 的角动量为

$$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}_C = m\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C,$$

质点系相对质心的角动量为

$$\boldsymbol{L}' = \sum_i \boldsymbol{L}_i' = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i' = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i',$$

因此 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{L}'$。

(3) 若该质点系为刚体，相对某参考系作角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 的定轴转动，转轴过质心且刚体相对转轴的转动惯量为 I_C，证明刚体相对该参考系中任意参考点的角动量均相同，且沿转轴方向的分量为 $\boldsymbol{L}_z = I_C\boldsymbol{\omega}$。

刚体相对过质心的转轴作定轴转动时，质心始终静止，因此相对任一参考点 O，质心的角动量 $\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{0}$，刚体的角动量 $\boldsymbol{L}$ 即为刚体相对质心的角动量 $\boldsymbol{L}'$（1 分）。刚体作角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 的定轴转动时，任一质元 m_i 的速度可表示为 $\boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i'$（1 分），故刚体的角动量为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_i' = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i') = \sum_i m_i[(\boldsymbol{r}_i' \cdot \boldsymbol{r}_i')\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}_i' \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}_i']\text{。}$$

以质心为原点建立空间直角坐标系，令 z 轴指向转轴的方向，则刚体相对转轴的转动惯量 $I_C = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$、刚体角速度 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$，刚体角动量沿转轴方向的分量大小为

$$L_z = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{L} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \sum_i m_i \left[(\boldsymbol{r}_i' \cdot \boldsymbol{r}_i')\left(\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\right) - (\boldsymbol{r}_i' \cdot \boldsymbol{\omega})\left(\boldsymbol{r}_i' \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\right)\right]$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{\omega}[r_i'^2\omega^2 - (\boldsymbol{r}_i' \cdot \boldsymbol{\omega})^2] = \sum_i \frac{m_i}{\omega}[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega^2 - (z_i\omega)^2]$$

$$= \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega = I_C\omega \text{（3 分），}$$

因此刚体角动量沿转轴方向的分量为

$$\boldsymbol{L}_z = L_z\boldsymbol{k} = (I_C\omega)\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = I_C\boldsymbol{\omega}\text{。}$$

13. 为避免火车停下来加水，可在铁轨旁设置长水槽，从匀速直线运动的火车上垂挂一根弯水管于水槽中，使水沿管上升流入火车水箱。已知火车水箱与水槽的高度差为 3.5 m，水的密度为 $1.0\times10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}$，重力加速度大小取为 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，试回答以下问题，结果保留两位有效数字：

(1) 分别判断在地面参考系与火车参考系中，水流是否能够看作定常流动；

水流在地面参考系中不能看作定常流动（1 分），在火车参考系中可以看作定常流动（1 分）。

(2) 若要使水能够流入水箱，计算火车速度大小需要满足的条件；

设地面参考系中火车速度大小为 v，则在火车参考系中水槽中的水流速为 v。

设大气压强为 p_0、水的密度为 ρ、火车水箱与水槽的高度差为 h、水到达水箱时流速为 u，则由伯努利方程可得

$$p_0+\frac{1}{2}\rho v^2=p_0+\frac{1}{2}\rho u^2+\rho gh$$（2 分），

解得 $u=\sqrt{v^2-2gh}$（1 分），应满足条件 $v^2-2gh>0$，即 $v>\sqrt{2gh}=8.3\ \mathrm{m/s}$（1 分）。

(3) 若火车行进 1.0 km 的路程后，水箱得到了体积为 $3.0\ \mathrm{m^3}$ 的水，已知水管直径为 10 cm，计算火车速度大小。

设经过的时间为 t、火车行进的路程为 s，则有 $s=vt$。

设水管的直径为 d，则其为水箱注水的体积流量为 $Q_V=uS=u\pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2=\frac{\pi}{4}ud^2$。

可得水管为水箱注水的总体积为

$$V=Q_Vt=\frac{\pi}{4}ud^2\frac{s}{v}=\frac{\pi}{4}d^2s\sqrt{1-\frac{2gh}{v^2}}$$（2 分），

代入数据可得火车速度大小

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{4V}{\pi d^2 s}\right)^2}}=9.0\ \mathrm{m/s}=32.3\ \mathrm{km/h}$$（2 分）。

14. 线密度为 $0.02\ \mathrm{kg/m}$ 的均匀弦线被 50 N 的力拉紧，一列简谐横波沿该弦线自左向右传播。观察弦上某点的运动，发现该点在作振幅为 4 cm、频率为 10 Hz 的简谐振动，且 $t=0$ 时刻的振动速度沿 y 轴正方向、振动量 $y=2$ cm。以该点为原点，建立自左向右的 x 轴，

(1) 列出该点简谐振动的运动学方程；

设该点简谐振动的运动学方程为

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\text{，}$$

其中振幅 $A = 4\ \mathrm{cm}$、频率 $\nu = 10\ \mathrm{Hz}$，可得角频率 $\omega = 2\pi\nu = 20\pi\ \ \mathrm{rad/s}$（1 分）。

在 $t = 0$ 时刻，由振动量

$$y(0) = A\cos\varphi = 2\ \mathrm{cm}\text{（1 分）}$$

可得 $\cos\varphi = \frac{1}{2}$，由振动速度

$$v(0) = -\omega A\sin\varphi > 0\text{（1 分）}$$

可得 $\sin\varphi < 0$，解得初相位 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$（1 分）。

因此该点简谐振动的运动学方程为

$$y(t) = 4\cos\left(20\pi\, t/\mathrm{s} - \frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{cm}\text{（1 分）。}$$

(2) 列出该简谐横波的运动学方程；

由弦的线密度 $\lambda = 0.02\ \ \mathrm{kg/m}$、弦上张力 $T = 50\ \mathrm{N}$，可得该简谐横波的传播速度

$$u = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} = 50\ \mathrm{m/s}\ \text{（1 分）。}$$

由于传播方向沿 x 轴正方向，可得该简谐横波的运动学方程

$$y(t,x) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right] = 4\cos\left(20\pi\, t/\mathrm{s} - \frac{2\pi}{5}x/\mathrm{m} - \frac{\pi}{3}\right)\ \mathrm{cm}\text{（2 分）。}$$

(3) 计算弦上振动初相位为 $\frac{2\pi}{3}$ 的所有位置。

令弦上坐标为 x 处的振动初相位为 $\frac{2\pi}{3}$，即

$$\varphi(x) = -\frac{2\pi}{5}x/\mathrm{m} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - 2k\pi\text{（1 分）}$$

其中 k 为整数，解得

$$x = (5k - 2.5)\ \mathrm{m}\text{（1 分）。}$$

15. 毕老师被外星人抓走，乘坐飞碟以 0.6 倍光速远离地球而去。助教听说后，立刻乘坐宇宙飞船出发前去援救，以 0.8 倍光速追赶飞碟。毕老师等待援救时仍不忘工作，给外星人上了一堂 100 分钟的力学课。试计算以下参数，结果保留三位有效数字：

(1) 在地球上的同学们看来，这堂课的持续时间；

飞碟相对地球的速度大小为 $v = 0.6\,c$，以地球为 S 系、飞碟为 S' 系、飞碟速度方向为正方向。则课堂相对 S' 系静止，在 S' 系中测得的课堂持续时间 $T' = 100$ min 为本征时间。由动钟变慢公式可得，在 S 系中测得的课堂持续时间为

$$T=\frac{T'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=125\ \mathrm{min}$$（3 分）。

(2) 飞碟相对宇宙飞船的速度大小，用真空中光速的倍数表示；

宇宙飞船相对地球的速度大小为 $u=0.8\,c$，以宇宙飞船为 S'' 系、宇宙飞船速度方向为正方向。由速度变换公式可得，在 S'' 系中测得的飞碟速度大小为

$$v''=\left|\frac{v-u}{1-\frac{u}{c^2}v}\right|=0.385\,c$$（4 分）。

(3) 在宇宙飞船上的助教看来，这堂课的持续时间。

由动钟变慢公式可得，在 S'' 系中测得的课堂持续时间为

$$T''=\frac{T'}{\sqrt{1-\frac{v''^2}{c^2}}}=108\ \mathrm{min}$$（3 分）。

16. 第 24 届冬季奥林匹克运动会将于 2022 年 2 月 4 日在北京开幕。北京冬奥会期间，国家游泳中心“水立方”通过“水冰转换”，华丽变身“冰立方”，承担冰壶项目的比赛。冰壶运动同时考验着运动员的体能与脑力，被誉为冰上的“国际象棋”。比赛分两队进行对抗，每队由四名队员组成，其中主将负责指挥；一名本方队员手持冰壶，滑至投掷线时释放；另外两名本方队员手持毛刷，快速用力擦拭冰面，使冰面熔化产生水，从而减小冰壶与冰面之间的摩擦因数；对方队员也可擦拭冰面，从而干扰冰壶的滑行轨迹。运动员在力求将本方冰壶投向圆垒的同时，也可根据实际需要，将场地上本方其他冰壶撞进圆垒，或是将对方冰壶撞出圆垒。为简化计算，我们将冰壶视作质量为 m、半径为 r 的匀质刚体圆柱，其底面贴着冰面滑行，

(1) 若冰壶以一定的初速度在冰面上无旋转地滑行，运动员在冰壶滑行的左前方擦拭冰面，试定性分析冰壶之后的运动；

冰壶无旋转地滑行时，其各个点部位所受摩擦力均向后。减小左方摩擦力，则其各个点部位所受摩擦力的合力矩竖直向下，使冰壶沿顺时针方向旋转（1 分）。冰壶边滑行边沿顺时针方向旋转时，其前方点部位所受摩擦力有向左的分量、后方点部位所受摩擦力有向右的分量。减小前方摩擦力，则其各个点部位所受摩擦力的合力有向右的分量，使冰壶运动轨迹向右偏移（1 分）。

(2) 若冰壶 1 以初速度 v_0 滑行的同时也在以角速度 ω_0 绕中心旋转，与静止在冰面上的冰壶 2 发生非弹性正碰，接触面法向速度分量的恢复系数为 e，两冰壶之间的摩擦因数为 μ，碰撞瞬间不考虑冰壶与冰面之间的摩擦力，试求碰撞后两冰壶

沿接触面法向的滑行速度分量 v_{1n}、v_{2n}；

由碰撞前后接触面法向动量分量守恒，可得

$$mv_{1n} + mv_{2n} = mv_0 \text{（1 分）。}$$

由接触面法向速度分量的恢复系数的定义，可得

$$v_{2n} - v_{1n} = ev_0 \text{（1 分）。}$$

解得

$$v_{1n} = \frac{1-e}{2}v_0,$$

$$v_{2n} = \frac{1+e}{2}v_0 \text{（1 分）。}$$

(3) 接上一问，试求碰撞后两冰壶绕中心旋转的角速度 ω_1、ω_2，以及沿接触面切向的滑行速度分量 $v_{1\tau}$、$v_{2\tau}$。

冰壶相对过中心的转轴的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2}mr^2\text{。}$$

设碰撞持续时间为 Δt，碰撞过程中两冰壶之间的平均弹力大小为 $\bar{N}$、平均摩擦力大小为 $\bar{f}$。

以下 a、b 两种情况，若完整推导出其中任何一种则得满分，若同时推导出两种则得不超过 5 分的加分，加分后全卷总分不超过 100 分。

a. 若碰撞过程中两冰壶之间的摩擦力始终存在，则其平均大小为

$$\bar{f} = \mu\bar{N}\text{。}$$

对冰壶 2，在接触面法向由动量定理可得

$$mv_{2n} = \bar{N}\Delta t,$$

故有

$$\bar{f}\Delta t = \mu\bar{N}\Delta t = \mu mv_{2n} = \frac{1+e}{2}\mu mv_0 \text{（1 分）。}$$

对两冰壶，由角动量定理可得

$$I\omega_1 - I\omega_0 = -\bar{f}r\Delta t = -\frac{1+e}{2}\mu mv_0 r \text{（1 分），}$$

$$I\omega_2 = \bar{f}r\Delta t = \frac{1+e}{2}\mu mv_0 r \text{（1 分）。}$$

对两冰壶，在接触面切向由动量定理可得

$$mv_{1\tau} = \bar{f}\Delta t = \frac{1+e}{2}\mu mv_0,$$

$$mv_{2\tau} = \bar{f}\Delta t = \frac{1+e}{2}\mu m v_0 \text{（1 分）。}$$

解得

$$\omega_1 = \omega_0 - (1+e)\frac{\mu v_0}{r},$$

$$\omega_2 = (1+e)\frac{\mu v_0}{r},$$

$$v_{1\tau} = \frac{1+e}{2}\mu v_0,$$

$$v_{2\tau} = \frac{1+e}{2}\mu v_0\text{。}$$

该情形要求碰撞过程中，两冰壶接触面之间的相对速度大小始终大于 0，即

$$(-v_{1\tau} + \omega_1 r) - (v_{2\tau} + \omega_2 r) = \omega_0 r - 3(1+e)\mu v_0 > 0 \text{（1 分）。}$$

b. 若

$$\omega_0 r - 3(1+e)\mu v_0 \le 0 \text{（1 分），}$$

则在碰撞过程中的某一时刻，两冰壶接触面之间的相对速度大小降为 0，摩擦力消失，该时刻两冰壶绕中心旋转的角速度即为最终的 ω_1、ω_2，该时刻两冰壶沿接触面切向的滑行速度分量即为最终的 $v_{1\tau}$、$v_{2\tau}$，有

$$(-v_{1\tau} + \omega_1 r) - (v_{2\tau} + \omega_2 r) = 0 \text{（1 分）。}$$

由碰撞前后接触面切向动量分量守恒，可得

$$mv_{1\tau} - mv_{2\tau} = 0 \text{（1 分）。}$$

以接触面为参考点，由碰撞前后角动量守恒，可得

$$(mv_{1\tau} + I\omega_1) + (mv_{2\tau} - I\omega_2) = I\omega_0 \text{（1 分）。}$$

对冰壶 2，结合角动量定理以及接触面切向动量定理，可得

$$I\omega_2 = \bar{f} r \Delta t = \left(\bar{f}\Delta t\right) r = (mv_{2\tau}) r = mv_{2\tau} r \text{（1 分）。}$$

解得

$$\omega_1 = \frac{2}{3}\omega_0,$$

$$\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_0,$$

$$v_{1\tau} = \frac{1}{6}\omega_0 r,$$

$$v_{2\tau} = \frac{1}{6}\omega_0 r\text{。}$$