中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B02GB001Y-05

课程名称：力学 21-22 秋季

任课教师：毕效军

注意事项：

1.考试时间为 120 分钟，考试方式 闭 卷；

2.全部答案写在答题纸上；

3.考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

中国科学院大学 2021-2022 学年秋季学期

力学 5 班期中考试参考答案与评分标准

原始成绩 p 经过如下换算后得到报告成绩 p'，所得结果向上取整：

$$p' = 100^{1-k}p^k,$$

其中幂指数 k 将原始平均成绩 $\bar{p}$ 换算为 75 分：

$$k = \frac{\lg 75 - 2}{\lg \bar{p} - 2}。$$

一、 填空题（共 8 题，每空 2 分，共 32 分）

若一空填错但接近正确答案，则可以得该空一半分，特殊情况可以得该空满分。

1. 已知三个矢量 $\boldsymbol{A} = (1,0,2)$、$\boldsymbol{B} = (1,1,1)$、$\boldsymbol{C} = (2,2,-1)$，则 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) =$ _-3_，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) =$ _$(-6,-6,3)$_。

   第二空填 $(6,6,-3)$ 得 1 分。

2. 自行车手在 $t = 0$ 时刻从静止开始以恒定的加速度 a 沿直线骑行，车轮的半径为 r 且保持纯滚动。则 t 时刻在地面参考系中，车轮最高点的速度大小为_$2at$_，加速度大小为_$a\sqrt{1+\frac{a^2t^4}{r^2}}$_。

   第一空填对的前提下，第二空体现了切向加速度与向心加速度的矢量相加得 1 分。

3. 质量为 m 的物体以初速率 v_0 从粗糙斜面底部冲上去后又滑下来，回到底部时末速率为 v_1，则在此过程中摩擦力所作的功为_$-\frac{1}{2}m(v_0^2-v_1^2)$_，物体达到的最大高度为_$\frac{v_0^2+v_1^2}{4g}$_。

   第一空填 $\frac{1}{2}m(v_0^2-v_1^2)$ 得 2 分，第二空填 $\frac{1}{4}m(v_0^2+v_1^2)$ 得 1 分。

4. 川藏铁路东起四川省成都市、西至西藏自治区拉萨市，是我国第二条进藏铁路，可大致看作沿北纬 30° 线呈东西走向。其中拉萨至林芝段于 2021 年 6 月 25 日开通运营，采用复兴号高原内电双源动车组，编组为 12 节车厢，每节车厢重 60 吨，设计时速 160 千米。科里奥利力在地球表面的分力称为地转偏向力，则从拉萨开往林芝的列车所受地转偏向力的方向为_南_（用东西南北表示），大小为_2.33×10^3 N_（保留三位有效数字）。

第一空填北得 1 分，第二空为 $2\sim2.5\times10^3$ N 得 2 分，为 $4\sim5\times10^3$ N 得 1 分。

5. 质量为 M 的滑块静止在光滑水平桌面上，一条不计质量、不可伸长的细绳套在滑块上，其两端分别系着质量为 m_1、m_2 的两个小球，伸出桌面半悬在空中。两个小球同时从静止开始释放，则绳中张力大小为_$\frac{2m_1m_2Mg}{2m_1m_2+(m_1+m_2)M}$_，滑块加速度大小为_$\frac{4m_1m_2g}{2m_1m_2+(m_1+m_2)M}$_。

第二空与第一空之比为 $\frac{2}{M}$ 得 2 分。

6. 质量为 M、倾角为 θ 的光滑斜面体放置在光滑水平面上，在其顶端距水平面高度为 h 处放置质量为 m 的小木块，小木块从静止开始滑至斜面体底部，则斜面体对小木块的支持力大小为_$\frac{Mmg\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}$_，在地面参考系中此支持力所作的功为_$-\frac{Mm^2gh\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}$_。

第二空与第一空之比为 $-\frac{mh\cos\theta}{M+m}$ 得 2 分。

7. 原长为 l、劲度系数为 k 的弹簧静止在光滑水平面上，其中一端固定，另一端系着质量为 m 的小球。质量为 M 的大球沿垂直于弹簧的方向与小球发生弹性正碰撞，弹簧在之后的运动中拉伸到的最大长度为 $2l$，则在碰撞后的瞬间，小球速度大小为_$l\sqrt{\frac{4k}{3m}}$_，大球速度大小为_$\frac{(M-m)l}{2M}\sqrt{\frac{4k}{3m}}$_。

第二空与第一空之比为 $\frac{M-m}{2M}$ 得 2 分，为 $\frac{M+m}{2M}$ 得 1 分。

8. 柯伊伯带中的彗星因受到某种扰动而径直朝向太阳坠落，经过小行星带时与质量相同的小行星发生完全非弹性碰撞，二者合并为新天体。若将原彗星的初始位置视为无穷远、初始速度视为 0，将原小行星视为沿圆轨道绕日运行，则新天体诞生时的速度大小为原小行星的_$\frac{\sqrt{3}}{2}$_倍，轨道周期为原小行星的_$\frac{8\sqrt{5}}{25}$_倍（结果保留根式）。

第一空填 $\sqrt{3}$ 得 1 分，填 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 得 1 分。

二、 简答题（共 3 题，每题 6 分，共 18 分）

若答出关键字词或推导出关键公式则得相应所有分。

9. 写出经典力学相对性原理以及伽利略变换公式。

任何惯性参考系中物体运动所遵循的力学定律均具有相同的数学表述形式，或任何密闭惯性参考系中的力学实验均无法判断该参考系静止还是匀速直线运动（3 分）。设一个惯性参考系 S' 相对另一个惯性参考系 S 以匀速度 $\boldsymbol{u}$ 平动，$t' = t = 0$ 时刻两个坐标系的原点重合，且将 x' 与 x 轴同沿 $\boldsymbol{u}$ 的方向设置，则两参考系之间运动学量的变换关系为 $t = t'$，$x = x' + ut$，$y = y'$，$z = z'$（3 分）。

10. 用运动学方法证明，平面曲线 $y = y(x)$ 上一点 (x_0, y_0) 处的曲率半径为

$$\rho(x_0) = \frac{\{1 + [y'(x_0)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|y''(x_0)|}。$$

设一质点沿平面曲线 $y = y(x)$ 运动，$t = 0$ 时刻位于坐标系原点，且其在 x 方向的速度分量恒为常量 v_0。可得该质点的各运动学量随时间的变化关系

$$x(t) = v_0 t，\ y(t) = y[x(t)] = y(v_0 t),$$

$$v_x(t) = v_0，\ v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y' v_0 \text{（1 分）},$$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + (y')^2}\, v_0 \text{（1 分）},$$

$$a_x(t) = 0，\ a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y'' v_0^2 \text{（1 分）},$$

$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = y'' v_0^2 \text{（1 分）。}$$

切向加速度大小为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{1 + (y')^2}\, v_0\right]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{y' y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} v_0^2 = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} a,$$

法向加速度大小为

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{1 - \frac{(y')^2}{1 + (y')^2}}\, a = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} a = \frac{|y''|}{\sqrt{1 + (y')^2}} v_0^2 \text{（1 分）},$$

可得曲率半径

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \text{（1 分）。}$$

11. 设 $\boldsymbol{r}$ 为位矢，$\boldsymbol{a}$ 为常矢量，判断形如 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{a}$ 的力场是否为保守力场。若 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$

是保守力场，求出对应的势能函数 $E_p(\boldsymbol{r})$。提示：可沿 $\boldsymbol{a}$ 的方向建立坐标轴。

以 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 处为原点建立直角坐标系，设定 x 轴沿 $\boldsymbol{a}$ 的方向。

则 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=ax$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}=a^2x\boldsymbol{i}$，得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=F(x)\boldsymbol{i}=a^2x\boldsymbol{i}$。

质点从 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1$ 处沿任意路径 L 移动到 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2$ 处，力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 所作的功为

$$W=\int_L\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_L\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L F(x)\boldsymbol{i}\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})=\int_L F(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}a^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a^2x_2^2-\frac{1}{2}a^2x_1^2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_2)^2-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_1)^2,$$

只与初末位置有关，而与具体路径无关，因此力场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})$ 是保守力场（3 分），可定义对应的势能函数 $E_p(\boldsymbol{r})$。质点从 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1$ 处移动到 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2$ 处的势能减少量为

$$E_p(\boldsymbol{r}_1)-E_p(\boldsymbol{r}_2)=W=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_2)^2-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}_1)^2,$$

以 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ 处为势能零点，则势能函数为 $E_p(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2$（3 分）。

三、 计算题（共 5 题，每题 10 分，共 50 分）

若结果正确则得满分，若推导到某一步骤则得该步骤及其之前所有分。

12. 在 $|x|<1$ 的区域内，将下列函数展开成马克劳林级数：

(1) $y=\frac{1}{1+x}$;

由 $y(x)=\frac{1}{1+x}$ 得 $y(0)=1$，由 $y'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ 得 $y'(0)=-1$（1 分），由 $y''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$ 得 $y''(0)=2$（1 分），由 $y'''(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$ 得 $y'''(0)=-6$（1 分）。

由 $y^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$ 得 $y^{(k)}(0)=(-1)^k k!$（1 分），代入马克劳林级数展开式

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2!}y''(0)x^2+\frac{1}{3!}y'''(0)x^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}y^{(k)}(0)x^k\ ,$$

可得

$$y(x)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\ （1\text{ 分}）。$$

(2) $y=\frac{1}{1+x^2}$;

将 (1) 中所有 x 替换为 x^2（1 分），可得

$$y(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\ \text{（1 分）。}$$

(3) $y=\arctan x$。

由 $y'(x)=\frac{1}{1+x^2}$（1 分）得 $y(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$（1 分），将 (2) 中所有项同时积分，可得

$$y(x)=\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\ \text{（1 分）。}$$

13. 在平面极坐标系中，分别设置径向方向矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 与横向方向矢量 $\boldsymbol{e}_\theta$，则点 $P(r,\theta)$ 的位矢可表示为 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$，

(1) 用几何方法说明，$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta$，$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta=-\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r$；

方向矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的模量恒为 1，因此只有改变其方向才能使其增量不为 $\mathbf{0}$。

若保持 θ 不变，赋予 r 一个增量 $\mathrm{d}r$，则两个方向矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 均沿 $\boldsymbol{e}_r$ 的方向平移 $\mathrm{d}r$ 的距离，其方向均不变，其增量为 $\mathbf{0}$。

若保持 r 不变，赋予 θ 一个增量 $\mathrm{d}\theta$，则两个方向矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 均沿 $\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向平移 $r\mathrm{d}\theta$ 的距离，同时逆时针旋转 $\mathrm{d}\theta$ 的角度，其增量不为 $\mathbf{0}$。

由几何关系可知，$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_\theta$ 相同（1 分），$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta$ 的方向与 $\boldsymbol{e}_r$ 相反（1 分），因而

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r|\boldsymbol{e}_\theta,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta=-|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta|\boldsymbol{e}_r。$$

由相似三角形的关系可得（2 分）

$$\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r|}{|\boldsymbol{e}_r|}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta|}{|\boldsymbol{e}_\theta|}=\frac{r\mathrm{d}\theta}{r},$$

因此$|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r|=|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta|=\mathrm{d}\theta$，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r=\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_\theta$，$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta=-\mathrm{d}\theta\boldsymbol{e}_r$。

(2) 推导极坐标系中速度的表达式；

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(r\boldsymbol{e}_r)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\ \text{（2 分）。}$$

(3) 推导极坐标系中加速度的表达式。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_r+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}t}\right)\\&=\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_r+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right)+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_\theta-r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r\right)\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r + \left(r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta \text{（4 分）。}$$

14. 初始质量为 m_0 的火箭在无引力且无阻力的自由空间由静止出发作直线运动，火箭携带足够燃料且喷射的相对速率为常量 u_0，

(1) 推导火箭速率 v 随火箭剩余质量 m 的变化关系；

设火箭质量为 m 时的速率为 v，喷射质量为 $-\mathrm{d}m$ 的燃料后，自身速度增加了 $\mathrm{d}v$，则由动量守恒可得

$$mv = (m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + (-\mathrm{d}m)(v - u_0) \text{（1 分），}$$

忽略高阶小量，化简得

$$m\mathrm{d}v + u_0\mathrm{d}m = 0 \text{（1 分），}$$

分离变量

$$\mathrm{d}v = -u_0\frac{\mathrm{d}m}{m},$$

两边同时积分

$$\int_0^v \mathrm{d}v = -u_0\int_{m_0}^m \frac{\mathrm{d}m}{m} \text{（1 分），}$$

得到火箭速率随火箭剩余质量的变化关系

$$v(m) = -u_0 \ln m\Big|_{m_0}^m = u_0 \ln\frac{m_0}{m} \text{（1 分）。}$$

(2) 求出火箭动量达到最大值时的火箭剩余质量；

火箭动量随火箭剩余质量的变化关系为

$$p(m) = mv = mu_0 \ln\frac{m_0}{m},$$

对质量求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = u_0\left(\ln\frac{m_0}{m} - 1\right) \text{（1 分）。}$$

令 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}m} = 0$，解得火箭动量达到最大值时的火箭剩余质量

$$m_{\mathrm{m}} = \frac{m_0}{\mathrm{e}} \text{（1 分）。}$$

(3) 求出火箭从出发到动量达到最大值的过程中推力所作的功。

提示：$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$。

设火箭质量为 m 时的速率为 v，在时间段 $\mathrm{d}t$ 内喷射质量为 $-\mathrm{d}m$ 的燃料，则由动量定理可得推力大小为

$$F=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{(-\mathrm{d}m)u_0}{\mathrm{d}t}=-u_0\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\text{（1 分），}$$

推力对火箭所作的元功为

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}l=Fv\mathrm{d}t=u_0^2\ln\frac{m}{m_0}\mathrm{d}m,$$

两边同时积分

$$\int_0^W\mathrm{d}W=u_0^2\int_{m_0}^{m}\ln\frac{m}{m_0}\mathrm{d}m\text{（1 分），}$$

得到推力对火箭所作的功随火箭剩余质量的变化关系

$$W(m)=u_0^2\left[m\left(\ln\frac{m}{m_0}-1\right)\right]\Bigg|_{m_0}^{m}=u_0^2\left[m\left(\ln\frac{m}{m_0}-1\right)+m_0\right]\text{（1 分）。}$$

令 $m=m_{\mathrm{m}}=\frac{m_0}{\mathrm{e}}$，可得该过程中推力对火箭所作的总功

$$W=m_0u_0^2\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)\text{（1 分）。}$$

15. 质量为 m 的物体以初速 v_0 从地面竖直上抛，空气阻力的大小与速率的平方成正比且比例系数为常数 μ 。以起抛点为原点，建立竖直向上的 x 轴，

(1) 分别列出物体上升和下降时加速度 a 随速度 v 的变化关系；

上升阶段加速度随速度的变化关系为

$$a=-g-\frac{\mu}{m}v^2\text{（1 分），}$$

下降阶段加速度随速度的变化关系为

$$a=-g+\frac{\mu}{m}v^2\text{（1 分）。}$$

(2) 推导物体上升时位置 x 随速度 v 的变化关系，求出物体达到的最大高度；

将 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v=\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\mathrm{d}x}$ 代入上升阶段的运动方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\mathrm{d}x}=-g-\frac{\mu}{m}v^2\text{（1 分），}$$

分离变量

$$\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\left(g+\frac{\mu}{m}v^2\right)},$$

两边同时积分

$$\int_0^x\mathrm{d}x=-\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\left(g+\frac{\mu}{m}v^2\right)}\text{（1 分），}$$

得到位置随速度的变化关系

$$x(v)=-\frac{m}{2\mu}\ln\left(g+\frac{\mu}{m}v^2\right)\Bigg|_{v_0}^{v}=\frac{m}{2\mu}\ln\left(\frac{mg+\mu v_0^2}{mg+\mu v^2}\right)$$（1 分）。

令 $v=0$，可得物体达到的最大高度

$$x_{\mathrm{m}}=x(0)=\frac{m}{2\mu}\ln\left(1+\frac{\mu v_0^2}{mg}\right)$$（1 分）。

(3) 推导物体下降时位置 x 随速度 v 的变化关系，求出物体落回原点时的速度大小。

将 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v=\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\mathrm{d}x}$ 代入下降阶段的运动方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\mathrm{d}x}=-g+\frac{\mu}{m}v^2$$（1 分），

分离变量

$$\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\left(g-\frac{\mu}{m}v^2\right)},$$

两边同时积分

$$\int_{x_{\mathrm{m}}}^{x}\mathrm{d}x=-\int_{0}^{v}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{2\left(g-\frac{\mu}{m}v^2\right)}$$（1 分），

得到

$$x(v)-x_{\mathrm{m}}=\frac{m}{2\mu}\ln\left(g-\frac{\mu}{m}v^2\right)\Bigg|_{0}^{v}=\frac{m}{2\mu}\ln\left(1-\frac{\mu v^2}{mg}\right),$$

得到位置随速度的变化关系

$$x(v)=x_{\mathrm{m}}+\frac{m}{2\mu}\ln\left(1-\frac{\mu v^2}{mg}\right)=\frac{m}{2\mu}\ln\left[1+\frac{\mu(v_0^2-v^2)}{mg}-\frac{\mu^2v_0^2v^2}{m^2g^2}\right]$$（1 分）。

令 $x(v)=0$，解得物体落回原点时的速度大小

$$v_1=v_0\sqrt{\frac{mg}{mg+\mu v_0^2}}$$（1 分）。

16. 负责执行我国首次自主火星探测任务的“天问一号”探测器于 2020 年 7 月 23 日 12 时 41 分在文昌航天发射场由长征五号遥四运载火箭发射升空，于 2021 年 2 月 10 日 19 时 52 分进入火星轨道，于 2021 年 5 月 15 日 7 时 18 分着陆于火星乌托邦平原南部预选着陆区，标志着此次任务的圆满成功。“天问一号”探测器在地火转移途中的运行轨道为霍曼转移轨道。为简化计算，不考虑行星对探测器的万有引力，设定行星在同一平面内沿圆轨道自西向东绕日运行，探测器发射后沿椭圆轨道绕日运行，离开地球时的速度方向与地球绕日公转的速度方向一致，且选择适当的发射时机，使得椭圆轨道的近日点为地球、远日点为火星。已知地球轨道半径 $r_{\mathrm{E}}=1.50\times10^8$

km，火星轨道半径 $r_{\mathrm{M}} = 1.52\, r_{\mathrm{E}}$，试计算以下参数，结果保留三位有效数字：

(1) 探测器抵达火星所需时间，以年为单位；

探测器轨道半长轴为

$$a = \frac{1}{2}(r_{\mathrm{E}} + r_{\mathrm{M}})\text{（1 分）。}$$

地球轨道周期为 $T_{\mathrm{E}} = 1\ \mathrm{yr}$，设探测器轨道周期为 T，由开普勒第三定律可得

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{r_{\mathrm{E}}^3}{T_{\mathrm{E}}^2}\text{（1 分），}$$

解得

$$T = \left(\frac{a}{r_{\mathrm{E}}}\right)^{\frac{3}{2}} T_{\mathrm{E}} = \left(\frac{r_{\mathrm{E}} + r_{\mathrm{M}}}{2r_{\mathrm{E}}}\right)^{\frac{3}{2}} T_{\mathrm{E}}\text{（1 分）。}$$

探测器抵达火星所需时间为轨道周期的一半，可得

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\left(\frac{r_{\mathrm{E}} + r_{\mathrm{M}}}{2r_{\mathrm{E}}}\right)^{\frac{3}{2}} T_{\mathrm{E}} = 0.707\ \mathrm{yr}\text{（1 分）。}$$

“天问一号”探测器地火转移的实际时间为 0.559 yr，短于计算结果，一方面是因为火星实际上沿偏心率较大的椭圆轨道运行，且在 2021 年初位于近日点附近；另一方面是因为探测器从发射到脱离地球引力范围的过程实际上是一个复杂的三体过程，地球的引力始终存在且使探测器加速。

(2) 探测器离开地球时相对地心的速度大小，以 km/s 为单位；

地球公转速率为

$$v_{\mathrm{E}} = \frac{2\pi r_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{E}}} = 29.9\ \mathrm{km/s}\text{。}$$

设太阳质量为 M，地球质量为m_{E}，则由

$$\frac{GMm_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}^2} = \frac{m_{\mathrm{E}} v_{\mathrm{E}}^2}{r_{\mathrm{E}}}\text{（1 分），}$$

可得

$$GM = v_{\mathrm{E}}^2 r_{\mathrm{E}}\text{。}$$

设探测器质量为 m，日心参考系中在近日点的速率为 v_1，在远日点的速率为 v_2。由角动量守恒可得

$$mv_1 r_{\mathrm{E}} = mv_2 r_{\mathrm{M}}\text{（1 分），}$$

即

$$v_2 = v_1 \frac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{M}}}\text{。}$$

由能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{r_{\mathrm{E}}}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_{\mathrm{M}}}\text{（1 分）},$$

即

$$\frac{1}{2}v_1^2-v_{\mathrm{E}}^2=\frac{1}{2}\left(v_1\frac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{M}}}\right)^2-v_{\mathrm{E}}^2\frac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{M}}}\text{。}$$

解得

$$v_1=v_{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{2r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{E}}+r_{\mathrm{M}}}}\text{（1 分）。}$$

探测器离开地球时相对地心的速度大小为

$$v_{1-\mathrm{E}}=v_1-v_{\mathrm{E}}=v_{\mathrm{E}}\left(\sqrt{\frac{2r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{E}}+r_{\mathrm{M}}}}-1\right)=2.94\ \mathrm{km/s}\text{。}$$

(3) 探测器抵达火星时相对火星的速度大小，以 km/s 为单位。

设火星轨道周期为 T_{M}，由开普勒第三定律可得

$$\frac{r_{\mathrm{M}}^3}{T_{\mathrm{M}}^2}=\frac{r_{\mathrm{E}}^3}{T_{\mathrm{E}}^2},$$

解得

$$T_{\mathrm{M}}=\left(\frac{r_{\mathrm{M}}}{r_{\mathrm{E}}}\right)^{\frac{3}{2}}T_{\mathrm{E}}\text{（1 分）},$$

火星公转速率为

$$v_{\mathrm{M}}=\frac{2\pi r_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{M}}}=\frac{2\pi r_{\mathrm{E}}}{T_{\mathrm{E}}}\sqrt{\frac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{M}}}}=v_{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{M}}}}=24.2\ \mathrm{km/s}\text{。}$$

由(2)中的结论可得

$$v_2=v_1\frac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{M}}}=v_{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{M}}}}\sqrt{\frac{2r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}+r_{\mathrm{M}}}}=v_{\mathrm{M}}\sqrt{\frac{2r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}+r_{\mathrm{M}}}}\text{（1 分）。}$$

探测器抵达火星时相对火星的速度大小为

$$v_{2-\mathrm{M}}=v_{\mathrm{M}}-v_2=v_{\mathrm{M}}\left(1-\sqrt{\frac{2r_{\mathrm{E}}}{r_{\mathrm{E}}+r_{\mathrm{M}}}}\right)=2.64\ \mathrm{km/s}\text{。}$$